浙江科技学院第八届高等数学竞赛试题

2012 年 5 月 19 日（8:30-10:30）

学院________班级__________姓名__________学号___________试场____考号_________

1．设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且 $f(1)=0$， $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}$．(12 分)

解：由题设条件，得 $\lim\limits_{u\to 1} f(u)=f(1)=0$， $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)}{u-1}=f'(1)=2$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{x\tan x}$

$=f'(1)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=f'(1)\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\dfrac{\cos x-1}{x^2})=f'(1)\cdot(1-\dfrac{1}{2})=1$．

此题不能用洛必达法则求，若用洛必达法则求（答案正确）得 **6** 分

2．计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$．　(12 分)

解：令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(t^2+1)$， $dx=\dfrac{2t}{t^2+1}dt$，

故 $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{(t^2+1)\ln(t^2+1)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int\ln(t^2+1)dt$

$\displaystyle=2t\ln(t^2+1)-4\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2t\ln(t^2+1)-4\int(1-\frac{1}{t^2+1})dt$

$=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$．

3．设 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数均存在，且 $f'_-(x_0)<0$， $f'_+(x_0)>0$，证明： $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值．(12 分)

证：因为 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，由极限的保号性定理，存在正数 δ_1，使得

当 $x\in(x_0-\delta_1,x_0)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，又此时 $x-x_0<0$，故 $f(x)>f(x_0)$．

又 $f'_+(x_0)>0$，同理，存在正数 δ_2，当 $x\in(x_0,x_0+\delta_2)$ 时，有 $f(x)>f(x_0)$，

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)>f(x_0)$，故 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值．

4. 设 $y=y(x)$， $z=z(x)$ 由 $z=xf(x+y)$ 及方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定，其中 f， F 分别有连续的一阶导数和偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx}$．(12 分)

解 1：在方程 $z=xf(x+y)$ 两边求微分，得 $dz=(f+xf')dx+xf'dy$，　(1)

在方程 $F(x,y,z)=0$ 两边求微分，得 $F_x'dx+F_y'dy+F_z'dz=0$，（2）

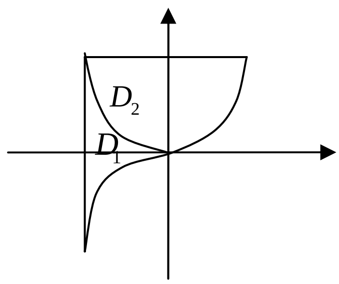
由(1)，(2)两式消去 dy 得，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{(f+xf')F_y'-xf'F_x'}{F_y'+xf'F_z'}$，$(F_y'+xf'F_z'\neq 0)$.

解 2：依次在 $z=xf(x+y)$ 和方程 $F(x,y,z)=0$ 两端关于 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f+x(1+\dfrac{dy}{dx})f' \\ F_x'+F_y'\dfrac{dy}{dx}+F_z'\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases},$$

解得 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{(f+xf')F_y'-xf'F_x'}{F_y'+xf'F_z'}$，$(F_y'+xf'F_z'\neq 0)$.

5.计算二重积分 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]d\sigma$，其中 D 由曲线 $y=x^3$，$x=-1$ 及 $y=1$ 所围成，$f(u)$ 为连续函数. (12 分)



解：如图，作曲线 $y=-x^3$，将区域 D 分割成 $D_1\cup D_2$，

其中 D_1 对称于 x 轴，D_2 对称于 y 轴，

从而 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]d\sigma$

$$=\iint\limits_{D_1}xd\sigma+\iint\limits_{D_2}xd\sigma+\iint\limits_{D_1}xyf(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}xyf(x^2+y^2)d\sigma=\iint\limits_{D_1}xd\sigma$$

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_{x^3}^{-x^3}xdy=-2\int_{-1}^{0}x^4dx=-\frac{2}{5}$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$.

证明：方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个实根. (14 分)

证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由积分中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，又 $\int_a^b f(x)dx=0$，从而 $f(\xi)=0$，即 ξ 是方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内的一个实根.

下证方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内的至少还有一个实根.

如果 ξ 是方程在 (a,b) 内的唯一实根，因为 $\int_a^b f(x)dx=0$，

所以 $f(x)$ 在 ξ 的两侧异号，从而 $(x-\xi)f(x)$ 在 ξ 的两侧同号，

故 $\int_a^b (x-\xi)f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx-\xi\int_a^b f(x)dx\neq 0$，

与条件 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x\,f(x)dx=0$ 矛盾，

故方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内的至少有两个实根.

7. 设 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和. (14 分)

解：由题设条件，$f_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx+C)=e^x(\int x^{n-1}dx+C)=\dfrac{1}{n}x^n e^x+C$，

又 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$，所以 $C=0$， $f(x)=\dfrac{1}{n}x^n e^x$.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx=e^x\int_0^x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1})dx$

$$=e^x\int_0^x\frac{dx}{1-x}=e^x\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-e^x\ln(1-x)，(-1\le x<1)$$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $f(0)=0$， $f(1)=1$.

试证： $\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\ge\dfrac{1}{e}$. (12 分)

证 1：令 $\varphi(x)=e^{-x}f(x)$，则 $\varphi'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$，

从而 $\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx=\int_0^1 e^x|e^{-x}[f'(x)-f(x)]|dx$

$$=\int_0^1 e^x|\varphi'(x)|dx\ge\int_0^1|\varphi'(x)|dx\ge\int_0^1\varphi'(x)dx=\varphi(1)-\varphi(0)=\frac{1}{e}$$

证 2： 因为 $|f'(x)-f(x)|\ge e^{-x}|f'(x)-f(x)|\ge e^{-x}[f'(x)-f(x)],x\in[0,1]$，

所以 $\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\ge\int_0^1 e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx$

$$=\int_0^1[e^{-x}f(x)]'dx=[e^{-x}f(x)]\Big|_0^1=\frac{1}{e}$$