2009 年研究生入学考试数学二试题及分析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为

（A）1　（B）2　（C）3　（D）无穷多个　[　　]

【分析】本题考查可去间断点.先找出使 $f\left(x\right)$ 无定义的点，然后根据可去间断点的定义判断.

【详解】首先找出使 $f\left(x\right)$ 无定义的点：满足 $\sin\pi x=0$ 的点，即 $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.

上述点若为可去间断点，则 $f\left(x\right)$ 在该点的左右极限存在且相等，又 $\sin\pi x=0$，必有分子 $x-x^3=0$，即可去间断点可能为 $x=0,\pm1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\dfrac{1}{\pi},\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$；

$$\lim_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi};$$

$$\lim_{x\to-1^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to-1^-}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to-1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to-1^+}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to-1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-1^+}f\left(x\right)$.

综上可知可去间断点有 3 个，故选（C）.

【评注】本题为基础题型. 设 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，若 $f_-(x_0)=f_+(x_0)\neq f(x_0)$，则 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 4】【例 5】；2009 版《数学

复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.39】，精选习题一第 3 小题（4）；文登冲刺§1【例 10】；《考研数学精题 660》（1.28，1.31）．

（2）当 $x \to 0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 为等价无穷小，则

（A）$a=1,b=-\frac{1}{6}$　　　　（B）$a=1,b=\frac{1}{6}$

（C）$a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　　　（D）$a=-1,b=\frac{1}{6}$　　　　[　　]

【分析】本题考查等价无穷小．已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=1$，求参数 a,b 的值.由于“ $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限值等于分子、分母的最低阶无穷小项之比的极限 ”，则利用等价无穷小和皮亚诺型余项的泰勒公式推导即可.

【详解】当 $x \to 0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax=x-\left(ax-\frac{1}{3!}\left(ax\right)^3+o\left(x^3\right)\right)$

$$=\left(1-a\right)x+\frac{1}{3!}\left(ax\right)^3-o\left(x^3\right).$$

$$g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)\sim -bx^3.$$

因为 $f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 为等价无穷小，

所以 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-a\right)x+\frac{1}{3!}\left(ax\right)^3-o\left(x^3\right)}{-bx^3}\Rightarrow 1-a=0,b=-\frac{1}{3!}$.

故 $a=1,b=-\frac{1}{6}$，即选（A）．

【评注】本题为基础题型，也可利用洛必达法则计算.

由题设可知 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\left(-3bx^2\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-a\cos ax\right)=0\Rightarrow a=1$.

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}\Rightarrow b=-\frac{1}{6}$.

本题实质考查极限中的常数的确定，类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 16】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.36】，精选习题一第 2 小题（7）（8）；文登冲刺§1【例 1】；《考研数学精题 660》（1.11，1.20）．

（3）设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则点 $\left(0,0\right)$

（A）不是 $f\left(x,y\right)$ 的连续点　　　（B）不是 $f\left(x,y\right)$ 的极值点

（C）是 $f\left(x,y\right)$ 的极大值点　　　（D）是 $f\left(x,y\right)$ 的极小值点　　　[　　]

【分析】本题考查二元函数的极值，利用取极值的充分条件判断.

【详解】由 $\mathrm{d}z = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = y$.

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = y = 0 \end{cases}$ 可得惟一驻点 $\left(0,0\right)$.

又 $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$，

则 $B^2 - AC = -1 < 0$ 且 $A > 0$，所以 $\left(0,0\right)$ 是 $f\left(x,y\right)$ 的极小值点，故选（D）.

【评注】本题利用了全微分和偏导数的关系：

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y .$$

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 9 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 9.35】；《考研数学精题 660》（1.272，1.273）.

（4）设函数 $f\left(x,y\right)$ 连续，则 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^2 f\left(x,y\right)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{4-y} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x =$

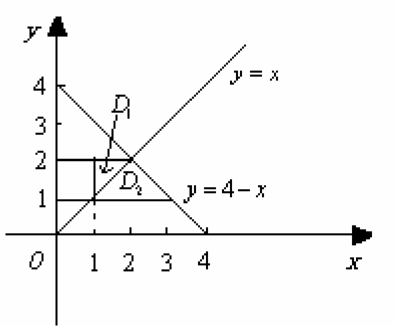
（A）$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^{4-x} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$　　　（B）$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{4-x} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$

（C）$\int_1^2 \mathrm{d}y \int_1^{4-y} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$　　　（D）$\int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$　　　[　　]

【分析】本题考查更换累次积分的次序.先画出积分域 D 的草图，因为四个备选项均只含一个累次积分，然后根据 D 是 X 型还是 Y 型得到新的累次积分.

【详解】由题设可知

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{\left(x,y\right) | 1 \le x \le 2, x \le y \le 2\right\} \cup \left\{\left(x,y\right) | 1 \le y \le 2, y \le x \le 4-y\right\}.$$



可从草图知 $D=D_1\cup D_2=\left\{(x,y)\,|\,1\le y\le 2,1\le x\le 4-y\right\}$，其为 Y 型区域，于是

原积分 $=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$，故选（C）.

【评注】本题为基础题型.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 10 讲【例 7】；2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 1 篇第 10 章【例 10.6】，精选习题十第 2 小题；《考研数学精题 660》(1.296，1.297）.

(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内

（A）有极值点，无零点　　　　（B）无极值点，有零点
（C）有极值点，有零点　　　　（D）无极值点，无零点　　　　[　　]

【分析】本题考查一元函数的极值和零点.关键是利用函数在一点处的曲率圆与曲线在该点附近的凹凸性相同.

【详解】由题意可知，曲率圆为 $x^2+y^2=2$ 在点 $(1,1)$ 附近为凸函数，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近为凸函数，所以 $f''(1)<0$.

又 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2,$$

其中 $\alpha=1-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''},\beta=1+\dfrac{1+y'^2}{y''},\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

与 $x^2+y^2=2$ 比较可得

$$\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\Big|_{(1,1)}=1,\frac{1+y'^2}{y''}\Big|_{(1,1)}=-1,\rho^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}\Big|_{(1,1)}=2$$，解之得

$$y'\big|_{(1,1)} = -1, y''\big|_{(1,1)} = -2.$$

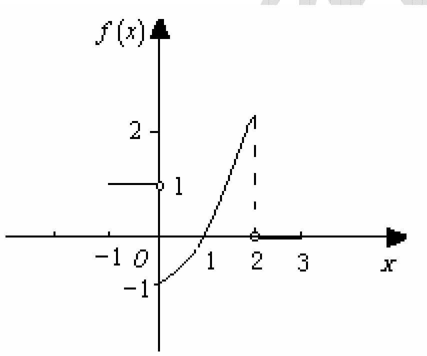
因此有 $f''(1) = -2 < 0$.因为 $f''(x)$ 不变号，所以在 $(1,2)$ 内 $f''(x) < 0$，$f'(x)$ 单调减少，$f'(x) < f'(1) = -1$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调减少，无极值点.

由拉格朗日中值定理有 $f(2) - f(1) = f'(\xi) < -1, \xi \in (1,2)$，于是有 $f(2) < -2 < 0, f(1) = 1 > 0$，故由零值定理可知 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有零点，即选（B）.

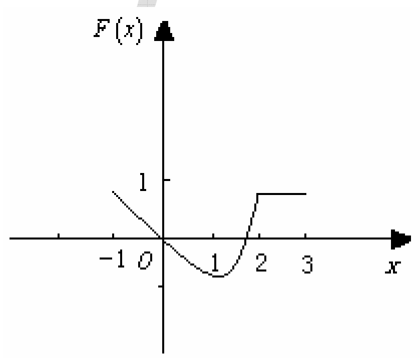
【评注】本题为一新题型，综合考查曲率圆、极值、函数的零点等知识点. 要熟记曲率圆方程、曲率中心的坐标公式.

相关概念和公式见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲.

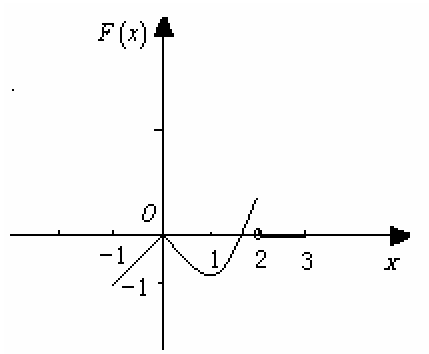
（6）设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为，



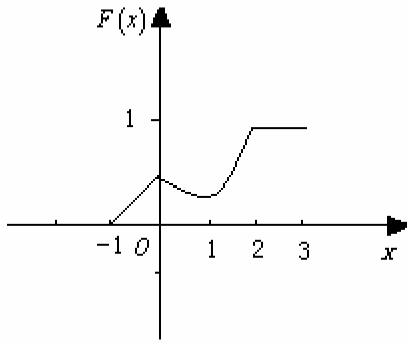
则 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为



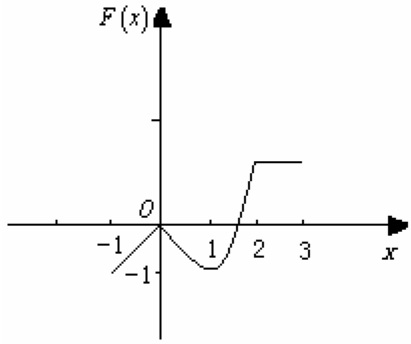
（A）



（B）



(C)



(D)

[　　]

【分析】本题考查函数 $y=f(x)$ 与 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 图形的关系. 可利用函数的单调增减性判断.

【详解】由图可知，

（1）在区间 $(-1,0)$， $f(x)\geq 0$，则 $F(x)$ 在此区间单调递增，排除（A）.

（2）$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 表示 $y=f(x), x=0, x=x$ 与 x 轴所围曲边梯形位于 x 轴上方的图形面积减去位于 x 轴下方的图形面积所得差值，当 $0<x<1$ 时，由图可知 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<0$，排除（C）.

（3）又当 $2<x<3$ 时， $f(x)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(2)$，$\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to 2^+}\int_2^x f(t)\mathrm{d}t=F(2)$，所以 $F(x)$ 在 $x=2$ 连续，排除（B），故选（D）.

【评注】本题为一新题型，综合考查了原函数的性质、定积分的几何意义、函数的单调增减性和函数的连续性..

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲【例 3】; 2009 版《数学复习指南》（理工类）精选习题六 1（3）.

（7）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　[　　]

【分析】本题考查分块矩阵的伴随矩阵的计算. 考虑到本题条件和备选项特征，本题可用逆推法求解，即根据 $AA^*=A^*A=|A|E$，只要分别计算 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 与四个选项的乘积，看哪一个结果为 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}E_4=|A||B|E_4$.

【详解】因为 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2|A|E&O\\O&3|B|E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|^2E&O\\O&|B|^2E\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3|A|E&O\\O&2|B|E\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|A||B|E&O\\O&|A||B|E\end{pmatrix}=|A||B|\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=|A||B|$，所以选（B）.

【评注】本题利用了伴随矩阵的性质 $AA^*=|A|E$.

本题也可以直接求解，如下：

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=|A||B|\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}O&|A||B|B^{-1}\\|B||A|A^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&|A|B^*\\|B|A^*&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix},$$

故选（B）.

完全类似公式见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 2 讲（重要公式和结论 4）；类似例题见《考研数学精题 660》（2.18）.

（8）设 A，P 均为 3 阶矩阵，$P^{\mathrm T}$ 为 P 的转置矩阵，且 $P^{\mathrm T}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{\mathrm T}AQ$ 为

（A）$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　　　[　　]

【分析】本题考查矩阵的计算，实质考查矩阵的初等变换和初等矩阵间的关系. 将矩阵表示为 $\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)C=PC$ 来计算.

【详解】由题设可知

$$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

故选（A）.

【评注】本题为基础题型. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 及其转置均为初等矩阵.因为矩阵左乘一初等矩阵相当于对其作相应的初等行变换，矩阵右乘一初等矩阵相当于对其作相应的初等列变换所以

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相当于对 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 作将第 2 行加到第 1 行的初等变换，结果为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相当于对 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 作将第 2 列加到第 1 列的初等变换，结果为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 2 讲【例 12】; 类似例题见 2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 2 篇第 2 章【例 2.19】.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_________.

【分析】本题考查曲线在一点的切线方程，先求出参数方程所确定函数的导数，然后由点斜式方程可得.

【详解】当 $x=0, y=0$ 时，$t=1$.于是

$$k=\frac{dy}{dx}\Big|_{(0,0)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Big|_{(0,0)}=\frac{2t\ln(2-t^2)+\frac{-2t^3}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}}\Big|_{t=1}=2\text{，所以切线方程为 } y=2x.$$

【评注】本题为基础题型. 参数方程所确定的函数的导数计算公式如下：

$$\text{设}\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}\text{，}\varphi(t),\psi(t)\text{ 均可导，且 }\varphi'(t)\neq 0\text{，则 }\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

注意本题计算斜率时不用化简，直接将 $t=1$ 代入求值即可.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 2 讲【例 16】;《考研数学精题 660》(1.11，1.20);类似例题见 2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 1 篇第 2 章【例 2.11】.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=1$，则 $k=$_________.

【分析】本题已知反常积分的结果，求参数.

【详解】$1=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{-kx}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{kx}dx=-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_{0}^{+\infty}$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx}=0\Rightarrow k<0$，$1=-\frac{2}{k}$，故 $k=-2$.

【评注】本题为基础题型. 注意对既有无穷积分又有瑕积分的混合型，一定要先进行分解，使单个积分为只有一个瑕点的瑕积分或只有一个积分限为无穷的无穷积分.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 5 讲§6【例 3】;《考研数学精题 660》(1.63).

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$________.

【分析】先利用分部积分法求出定积分，然后求数列极限.

【详解】$\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=-e^{-x}\sin nx\Big|_0^1+n\int_0^1 e^{-x}\cos nx dx$

$$=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Big|_0^1-n^2\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-1}\cos n+n-n^2\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x\,.$$

所以$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-1}\cos n+n}{1+n^2}$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-1}\cos n+n}{1+n^2}=0$.

【评注】对于$\int\mathrm{e}^{kx}\sin ax\mathrm{d}x$，$\int\mathrm{e}^{kx}\cos ax\mathrm{d}x$积分，有如下计算公式：

$$\int\mathrm{e}^{kx}\sin ax\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(\sin ax\right)'\\ \mathrm{e}^{kx} & \sin ax\end{vmatrix}}{k^2+a^2}+C\;;\;\int\mathrm{e}^{kx}\cos ax\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' & \left(\cos ax\right)'\\ \mathrm{e}^{kx} & \cos ax\end{vmatrix}}{k^2+a^2}+C\,.$$

$$\text{于是有}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' & \left(\sin nx\right)'\\ \mathrm{e}^{-x} & \sin nx\end{vmatrix}}{(-1)^2+n^2}\Bigg|_0^1=\frac{\begin{vmatrix}-\mathrm{e}^{-x} & n\cos nx\\ \mathrm{e}^{-x} & \sin nx\end{vmatrix}}{n^2+1}\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{\mathrm{e}^{-x}\left(\sin nx+n\cos nx\right)}{n^2+1}\Bigg|_0^1=-\frac{\mathrm{e}^{-1}\left(\sin n+n\cos n\right)-n}{n^2+1}\,.$$

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 7】;《考研数学精题 660》(1.1).

(12) 设$y=y(x)$是由方程$xy+\mathrm{e}^y=x+1$确定的隐函数，则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$________

【分析】本题考查隐函数在一点的导数.

【详解】当$x=0$时，$y=0$.

$xy+\mathrm{e}^y=x+1$两边对x求导得

$y+xy'+\mathrm{e}^y y'=1$.将$x=0,y=0$代入可得$y'\big|_{x=0}=1$.

$y'+y'+xy''+\mathrm{e}^y\left(y'\right)^2+\mathrm{e}^y y''=0$，即$2y'+\left(x+\mathrm{e}^y\right)y''+\mathrm{e}^y\left(y'\right)^2=0$

将$x=0,y=0$，$y'\big|_{x=0}=1$代入上式可得$y''\big|_{x=0}=-3$.

【评注】本题为基础题型. 求隐函数在一点的导数时，不必写出其导数的一般式.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 2 讲【例 14】；2009 版《数学复习

指南》（理工类）第 1 篇第 2 章【例 2.14】.

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________ .

【分析】本题考查函数在某区间的最值. 利用【评注】中求最值的方法即可. 求幂指函数的导数一般先将其恒等变形化为指数函数，然后再求导.

【详解】 $y'=\left(x^{2x}\right)'=\left(\mathrm{e}^{2x\ln x}\right)'=2\mathrm{e}^{2x\ln x}\left(\ln x+1\right)=2x^{2x}\left(\ln x+1\right)$.

令 $y'=0$ 可得惟一驻点 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 且

$$y\big|_{x=1}=x^{2x}\big|_{x=1}=1, y\Big|_{x=\frac{1}{\mathrm{e}}}=x^{2x}\Big|_{x=\frac{1}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}<1,$$

所以函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$.

【评注】本题为基础题型. 求函数的最值的一般步骤为：

① 求函数的导数，求出驻点，并求出使导数不存在的点；
② 求出第①步所得各点的函数值和该函数定义域端点处的函数值；
③ 比较以上各函数值的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲【例 9】; 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 6.12】;《考研数学精题 660》（1.119，1.124）.

（14）设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$__________ .

【分析】本题可利用相似矩阵的主对角线之和（即矩阵的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 相等来计算.

【详解】 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为一常数，其值等于 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的对角线元素之和，

而相似矩阵的对角线元素之和相等. 所以

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2+0+0=2.$$

【评注】对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda^{n}-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\lambda^{n-1}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

本题中 $r\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)=1$，且矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 2，所以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=2$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 5 讲【例 3】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 5 章【例 5.4】；文登冲刺题§1【例 5】.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）　(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

【分析】本题考查“$\dfrac{0}{0}$型”未定式极限的计算，可利用洛必达法则，并要结合等价无穷小代换.

【详解】当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x(1+\tan x)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x}\overset{\text{洛}}{=}\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-2\sec^2 x\tan x}{1}=\frac{1}{4}.$$

【评注】本题为基础题型. 在利用洛必达法则求极限时，能先利用等价无穷小代换化简的应先化简再求导，以避免不必要的繁琐.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 17】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.22】；文登冲刺§1【例 2】；《考研数学精题 660》（1.13）.

（16）　(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

【分析】本题先作变量代换 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$，然后再利用分部积分法求解.

【详解】设 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$，于是

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int \ln(1+t)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

而$\displaystyle\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C.$$

所以

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C.$$

【评注】本题为基础题型．注意最后一定要将变量还原.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 3 讲【例 9】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 3 章【例 3.15】．

（17） (本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【分析】本题求多元复合函数的全微分和二阶偏导数，利用复合函数求导法计算.

【详解】由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3',\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$，

所以 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(f_1'+f_2'+yf_3'\right)\mathrm{d}x+\left(f_1'-f_2'+xf_3'\right)\mathrm{d}y$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y\left(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}''\right)$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'.$$

【评注】本题为基础题型.注意多元复合函数的一阶偏导数仍然是以 x,y 为自变量，以 $u=x+y,v=x-y,w=xy$ 为中间变量的复合函数，再求偏导数时，仍用复合函数求导法.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 9 讲【例 9】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 9.19】，精选习题九第 5、6 小题；《考研数学精题 660》（1.255）.

（18）（本题满分 10 分）

设非负函数 $y=y(x)(x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$．当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

【分析】 $xy''-y'+2=0$ 为不含 y 的二阶微分方程，可令 $y'=p$ 将方程降为一阶方程计算.

然后再结合其他条件计算.

【详解】记 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入微分方程，当 $x>0$ 时，

$p'-\frac{1}{x}p=-\frac{2}{x}$，解之得

$$y'=p=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int-\frac{2}{x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)$$

$$=x\left(\int-\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x+C_1\right)=2+C_1x.$$

因此　$y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2\,(x>0)$.

由已知 $y(0)=0$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}y=0$，于是 $C_2=0$， $y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2\,(x>0)$.

由于 $2=\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}C_1x^2\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{6}C_1$，所以 $C_1=6$，故 $y=2x+3x^2\,(x>0)$.

由于 $x=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3y+1}-1\right)$， $0\leq y\leq 5$，故所求体积为

$$V=5\pi-\pi\int_0^5x^2\mathrm{d}y=5\pi-\pi\int_0^5\left(\sqrt{3y+1}-1\right)^2\mathrm{d}y=5\pi-\frac{13\pi}{6}=\frac{17\pi}{6}.$$

【评注】体积也可如下计算：

$$V=2\pi\int_0^1xy(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1x\left(2x+3x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}\pi.$$

完全类似例题见《考研数学精题 660》（1.219）.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲§1【例 3】，第 7 讲【例 8】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 5 章【例 5.13】，第 6 章【例 6.38】；《考研数学精题 660》（1.200，1.202，1.206）.

（19） (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

【分析】本题可利用极坐标和直角坐标计算.

【详解】方法一　如图 1，区域 D 的极坐标表示为

$$0\le\rho\le 2(\sin\theta+\cos\theta),\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}.$$

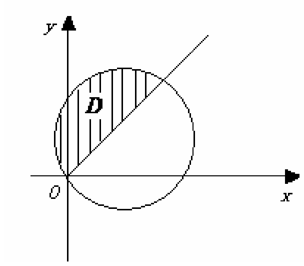


图 1

$$\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\rho(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3\mathrm{d}(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$=\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

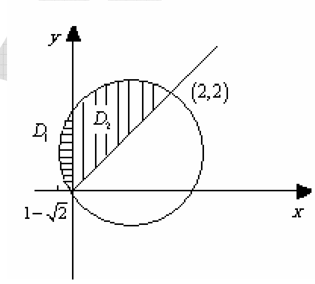


图 2

方法二　将区域 D 分成 D_1, D_2 两部分（如图 2），其中

$$D_1=\left\{(x,y)\,|\,1-\sqrt{2-(x-1)^2}\le y\le 1+\sqrt{2-(x-1)^2}, 1-\sqrt{2}\le x\le 0\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\,|\,x\le y\le 1+\sqrt{2-(x-1)^2}, 0\le x\le 2\right\}$$

由二重积分的性质知

$$\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而

$$\iint\limits_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1-\sqrt{2}}^0\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1-\sqrt{2}}^0 2(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^3\Big|_{1-\sqrt{2}}^0=-\frac{2}{3}.$$

$$\iint\limits_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2\left[2-2(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left[4+\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^3\Big|_0^2\right]=-2.$$

所以 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}-2=-\frac{8}{3}$.

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 10 章【例 10.14】;《考研数学精题 660》（1.299）.

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线.当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$，求函数 $y(x)$ 的表达式.

【分析】本题考查曲线在一点的法线方程和二阶常系数非齐次微分方程的通解的计算，利用相关公式和定理求解.

【详解】当 $-\pi<x<0$ 时，设 (x,y) 为曲线上的任一点，由导数的几何意义，法线斜率为

$$k=-\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

由题意，法线斜率为 $\frac{y}{x}$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}.$$

分离变量得 $x^2+y^2=C$.由初始条件 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，得 $C=\pi^2$，所以

$$y=\sqrt{\pi^2-x^2}，-\pi<x<0. \qquad ①$$

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x \qquad ②$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-1 \qquad ③$$

因为曲线 $y=y(x)$ 光滑，所以 $y(x)$ 连续且可导，由①式知

$$y(0)=\lim_{x\to 0^-} y(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\pi^2-x^2}=\pi\text{，}$$

$$y'(0)=y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x}=0\ .$$

代入②③式，得 $C_1=\pi, C_2=1$，故 $y=\pi\cos x+\sin x-x$，$0\le x<\pi$.

因此 $y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

【评注】本题利用了曲线 $y=y(x)$ 光滑的条件，则 $y(x)$ 连续且可导.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 7 讲【例 11】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 5 章【例 5.14】;《考研数学精题 660》（1.233）.

（21）　(本题满分 11 分)

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在

$\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【分析】（Ⅰ）考查拉格朗日中值定理，利用辅助函数和罗尔定理证明；
（Ⅱ）由（Ⅰ）可证明.

【详解】（Ⅰ）取 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，由题意知

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)\text{，}$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

（Ⅱ）对于任意的 $t\in(0,\delta)$，$f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续,在 $(0,t)$ 内可导，由右导数定义及拉格

朗日中值定理有

$$f_+'(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi)\text{，其中}\xi\in(0,t).$$

由于 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=A$，且当 $t\to0^+$ 时，$\xi\to0^+$，所以 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(\xi)=A$.

故 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【评注】本题（Ⅰ）为教材中一定理， 文登强化班笔记中在中值定理证明部分讲原函数法时特意将拉格朗日中值定理作为例子归纳总结了辅助函数的作法，原笔记如下：

对于拉格朗日中值定理：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(x)+C=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

$$\Rightarrow f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C=0$$

令 $C=0$，取 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，

于是 $F(a)=F(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$，利用罗尔定理即可证.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 4 讲【例 8】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 4 章【例 4.8】；《考研数学精题 660》（1.63）.

（22） (本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，

（Ⅰ）求满足 $\boldsymbol{A}\xi_2=\xi_1$，　$\boldsymbol{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 无关.

【分析】（Ⅰ）解非齐次线性方程组，利用矩阵初等行变换将 $\bar{A}\to$ 阶梯形，然后利用 $A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$（其中 $\bar{A}=(A|b)$）进行判定并求解.（Ⅱ）可利用 $|\xi_1,\xi_2,\xi_3|\neq0$ 或向量组线性无关的定义证明.

【详解】（Ⅰ）$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

于是 $r(A)=r(\overline{A})=2$，取 x_2 为自由变量，可得

$$x_3=-2x_2+1,\quad x_1=-x_2.$$

所以 $\xi_2=\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\-2x_2+1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，（$x_2=k$ 为任意常数）.

设 $B=A^2=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，则

$$\overline{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是 $r(B)=r(\overline{B})=1$，取 x_2,x_3 为自由变量，则 $x_1=-x_2-\frac{1}{2}$，所以

$$\xi_3=\begin{pmatrix}-x_2-\frac{1}{2}\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

（其中 $x_2=k_2,x_3=k_3$ 为任意常数）.

（Ⅱ）**证法 1**　由（Ⅰ）知

$$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1&-k&-k_2-\frac{1}{2}\\1&k&k_2\\-2&-2k+1&k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-k&-k_2-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&k_3+2k_2+1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq0,$$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

证法 2　由题设可得 $A\xi_1=\mathbf{0}$.设存在数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}, \quad ①$$

等式两端左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}，即 k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}，即$$

$$k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}. \quad ②$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$，即 $k_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，于是 $k_3=0$，代入②式得 $k_2\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，

故 $k_2=0$.将 $k_2=k_3=0$ 代入①式可得 $k_1=0$，从而 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 4 章【例 4.7】;《考研数学精题 660》（2.37）.

（23） (本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【分析】（Ⅰ）先写出二次型 f 的矩阵，然后利用 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$ 求解.

（Ⅱ）由 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$ 可知正惯性指数为 2，即可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有两个大于零，一个为零，即可得 a 值.

【详解】由题设可知二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda-a & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$

$$=\left(\lambda-a\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=\left(\lambda-a\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda-a\right)\left[\left(\lambda-a\right)\left(\lambda-a+1\right)-2\right]$$

$$=(\lambda-a)\left[\lambda^2-(2a-1)\lambda+a^2-a-2\right]$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1).$$

所以 f 的矩阵 A 所有的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$.

（II）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，则它的正惯性指数为 2. 于是 f 的矩阵 A 的特征值中有两个大于零，一个为零.显然 $\lambda_3>\lambda_1>\lambda_2$， 所以 $\lambda_2=a-2=0$， 即 $a=2$.

【评注】二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的规范型若为

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2\quad (p\le r\le n)\text{（唯一）}.$$

则 p （A 的大于 0 的特征值的个数）称为二次型的正惯性指数，r 称为二次型的秩，$r-p$ （A 的小于 0 的特征值的个数）称为二次型的负惯性指数.

类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 6 讲【例 1】【例 2】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 6 章【例 6.9】【例 6.10】;《考研数学精题 660》（2.90，2.94）.