考生编号

考生姓名

报考单位

密 封 线 内 不 要 答 题

2011年考研数学(三)试题

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

得分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在题后括号内.

(1) 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

(A) $k=1, c=4$.　　(B) $k=1, c=-4$.

(C) $k=3, c=4$.　　(D) $k=3, c=-4$.　　【　】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0.　　【　】

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

题号	一	二	三									总分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 【　】

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.　　(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得到单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的三个线性无关的解，k_1,k_2 为任意实数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$. 【　】

(7) 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

【　】

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自该总体的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$ 有

(A) $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$.　　(B) $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$.

(C) $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$.　　(D) $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$.

【　】

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在题中横线上.

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ________.

(10) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$ ________.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

得分	评卷人

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分$\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

密　封　线　内　不　要　答　题

得分	评卷人

(18)(本题满分 10 分)

证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

得分	评卷人

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_t = \left\{(x,y) \middle| 0 \leqslant y \leqslant t-x, 0 \leqslant x \leqslant t\right\}(0 < t \leqslant 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^T$,不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^T$ 线性表出.

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

得分	评卷人

(21)(本题满分 11 分)

$\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量.

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

得分	评卷人

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(Ⅰ) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(Ⅲ) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

得分	评卷人

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)服从区域G上的均匀分布，其中G是由$x-y=0$，$x+y=2$与$y=0$所围成的三角形区域.

(Ⅰ)求X的概率密度$f_X(x)$；

(Ⅱ)求条件概率密度$f_{X|Y}(x\mid y)$.

密　封　线　内　不　要　答　题

2011年考研数学(三)
试题分析、详解及评注

一、选择题

(1) **应选(C)**

【分析】此题利用等价无穷小的知识，通过洛比达法则求极限的方法求解.

【详解】由题意，$f(x)$ 与 cx^k 是等价无穷小，由等价无穷小的定义，有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{cx^k}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}\xlongequal{\text{洛比达法则}}\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\xlongequal{\text{洛比达}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\xlongequal{\text{洛比达}}\lim_{x\to0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\frac{24}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=$$

1，从而 $k=3,ck(k-1)(k-2)=24$；即 $k=3,c=4$，故选 C.

【评注】此题考查等价无穷小的有关知识，属基本题型. 求 $\frac{0}{0}$ 型极限，首先可考虑是否可以应用洛比达法则计算. 完全类似题型可参见《考研数学复习指南》(经济类，2012版) P_{30}，例【1.60】.

(2) **应选(B)**

【分析】利用导数的定义求极限，对函数进行变形，用加一项减一项的方式凑出函数在零点的导数的定义，进而解得极限.

【详解】$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)+2f(0)-2f(x^3)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$

故 B 项入选.

【评注】此题考查导数的定义，通过适当的变形，凑出 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的导数的定义形式求解. 此题要求熟练灵活地掌握导数的定义.

(3) **应选(A)**

【分析】此题考查数列的敛散性，对于此类抽象题，可采用取反例法逐项判断.

【详解】① 对选项 B 取 $u_{2n}=-1,u_{2n-1}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0=0$ 收敛，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散，所以 B 项不正确.

② 对 C 项，取 $u_{2n-1}=\frac{1}{2n-1},u_{2n}=\frac{-1}{2n}$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}-u_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而 C 项错误.

③ 对 D 项，取 $u_{2n-1}=u_{2n}=1$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=0$ 收敛，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，可知 D 项错误.

综上所述，A 项入选.

【评注】此题属常考题型，通常用取特例法来判断正误，类似题目可参见《考研数学

复习指南》(经济类,2012 版)P_{221} 例【8.32】.

(4) **应选(B)**

【分析】利用定积分的性质直接比较被积函数在积分区域上的大小即可.

【详解】在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上,$\sin x < \cos x < 1 < \cot x$,从而

$$\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x,$$

从而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x.$

故 B 项入选.

【评注】此题考查定积分的比较定理(见《考研数学复习指南》(经济类,2012 版)P_{90} 基本性质(7)),类似题目可参见《考研数学复习指南》(经济类,2012 版)P_{92} 例【4.2】.

(5) **应选(D)**

【分析】本题可直接利用矩阵初等变换的知识求解,左乘变行,右乘变列.

【详解】由题意有

$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}.$

故 D 项入选.

【评注】此题考查矩阵初等变换和逆矩阵的基本知识,属基本题型,注意左乘变行,右乘变列,类似题目可参见《考研数学复习指南》(经济类,2012 版)P_{318} 例【2.6】.

(6) **应选(C)**

【分析】由线性方程组的有关知识知,若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的两个解,则 $\frac{\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{2}$ 也为一个解,$\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 为其对应的齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解由其特解和其对应的齐次方程的通解相加构成.

【详解】$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的一个解为 $\frac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2}$,

而 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 线性无关,从而 $\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1$ 也线性无关,且都为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,从而原方程的通解可表示为

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1),$$

故 C 项选入.

【评注】此题考查线性方程组通解,基础解系的有关知识,需掌握线性方程组通解的构成和其对应齐次线方程组解之间的关系.

(7) **应选(D)**

【分析】例用连续分布密度函数的性质求解此题,对每个选项验证其是否满足密度函数的性质,用排除法求解.

【详解】对选项(D)$\int_{-\infty}^{-\infty} f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)\mathrm{d}x = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$

而易知,四个选项均满足大于等于零的条件,从而(D)项满足连续分布概率密度的条件,为概率密度(其他选项均无法验证满足$(-\infty,+\infty)$上积分为 1 的条件).从而 D 入选.

【评注】此题考查密度函数的性质,为基础题型.

若 x 为连续型随机变量,则其密度函数 $\varphi(x)$ 满足

(1)$\varphi(x) \geqslant 0$;

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$;

(3) $P(x_1 < x \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\mathrm{d}x$；

(4) $F'(x) = \varphi(x)$，x 为 $\varphi(x)$ 的连续点，分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

类似例题参见《考研数学复习指南》(经济类，2012 版) P_{160} 例【2.5】.

(8) 应选(D)

【分析】本题要判断两统计量 T_1, T_2 的期望和方差的大小关系，利用样本独立同分布的题设条件，通过对单个服从参数为 λ 的泊松分布的样本的期望和方差导出 T_1 和 T_2 的数字特征，进而判断它们的大小关系.

【详解】由 $X_1, \cdots, X_n \sim P(\lambda)$ 知 $EX_i = \lambda, DX_i = \lambda, i = 1,2,\cdots,n$.

从而 $ET_1 = E\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \lambda$，

$$ET_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}EX_n = \lambda + \frac{\lambda}{n},$$

故 $ET_1 < ET_2$.

$$DT_1 = \frac{1}{n^2}D\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n},$$

$$DT_2 = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} DX_i + \frac{1}{n^2}DX_n = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2} > \frac{\lambda}{n} = DT_1.$$

从而 D 项入选.

【评注】本题实质上考查统计量的数字特征的求解，属于基本题型. 对于独立同分布的样本 $X_1, \cdots, X_n$，相加和相乘的多个样本的期望和方差都可分别求取再相加或相乘.

二、填空题

(9) 应填 $(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$

【分析】首先要求出 $f(x)$ 的一般表达式，即求极限，然后用求导公式求函数的导数即可.

【详解】$\lim\limits_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x\lim\limits_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}\cdot 3x} = x\mathrm{e}^{3x}$.

即 $f(x) = x\mathrm{e}^{3x}$.

$f'(x) = \mathrm{e}^{3x} + 3x\mathrm{e}^{3x}$.

【评注】此题考查了重要极限 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ 的应用，也考查了基本的指数函数的求导，两个知识点都是基础的知识点，需熟练重点掌握.

(10) 应填 $(1+2\ln 2)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$

【分析】本题要求二元函数的全微分，函数 $z(x,y)$ 属幂指函数，首先化为指数函数再求导即可.

【详解】$z = (1+\dfrac{x}{y})^{\frac{x}{y}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})}$，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\left[\frac{1}{y}\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{y}\cdot\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x}{y}}\right],$$

$$\frac{dz}{dy}=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\left[-\frac{x}{y^2}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\cdot\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x}{y}}\right],$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1)}=1+2\ln 2,\quad \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(1,1)}=-(1+2\ln 2),$$

从而　$dz|_{(1,1)}=(1+2\ln 2)(dx-dy)$.

【评注】此题考查二元函数的全微分的求解，幂指函数的求导一般先化为指数型，或先取对数再求导.此题属基本题型，也是常考的考点，类似例题可参见《考研数学复习指南》(经济类，2012 版)P_{230}，例【9.6】.

(11) **应填** $y=-2x$

【分析】此题要求曲线在某点处的切线，利用导数的几何意义求切线的方程.

【详解】曲线方程两边对 x 求导

得$\left[\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=e^y\cdot\frac{dy}{dx}$,

代入 $x=0,y=0$ 得

$$2\left(1+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}\right)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)},$$

解得　$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}=-2.$

从而，切线的斜率为 -2，切线方程为　$y=-2x+b$，代入(0,0)点得 $b=0$，因此曲线过(0,0)点的切线方程为 $y=-2x$.

【评注】此题考查求曲线过某点的切线方程的方法，属基本题型.曲线 $y=f(x)$ 上过(x_0,y_0)点的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

(12) **应填** $\frac{4\pi}{3}$

【分析】此题要求旋转体的体积，即某平面图形绕 x 轴旋转所成旋转体体积.分析此题，即求平面图形 D 绕 x 轴旋转所成旋转体体积，图形 D 为图 11-1 中所示的阴影部分.

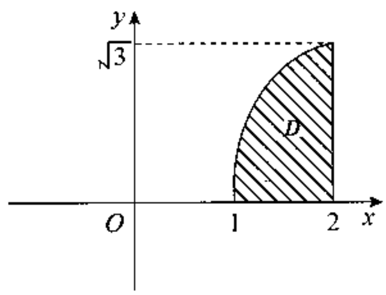


图 11-1

【详解】所求旋转体体积

$$V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx$$

$$=\pi\int_1^2 x^2-1dx=\frac{4\pi}{3}.$$

【评注】此题考查平面区域绕 x 轴旋转所成旋转体体积，此题中平面图形 D 较为简单，直接利用定积分求解即可，属基本题型.

(13) **应填** $3y_1^2$

【分析】此题要求二次型的标准型.要化二次型为标准型.需求解二次型所对应矩阵的特征根.根据题设中所含信息求解特征根.

【详解】由题意，$\boldsymbol{A}$ 的行元素之和为 3，从而有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$，从而 3 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根，

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，即 $\boldsymbol{A}$ 只有 1 个非零特征根，从而 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$,

则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准型为　$f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{X=QY}3y_1^2$.

【评注】此题考查二次型化标准型的有关知识. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可通过正交变换化为标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为二次型所对应矩阵的特征根，正交矩阵 Q 由正交的单位特征向量构成. 二次型的有关知识是重要的知识点，属常考知识点，有关此知识点的详细讲解和类似题目可参见《考研数学复习指南》(经济类，2012 版)P_{420} 题型二.

(14) 应填 $\mu\sigma^2+\mu^3$

【分析】利用二维正态随机变量的性质求随机变量函数的数学期望. 可用独立性简化求解过程.

【详解】由题设知 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，

从而 X,Y 的相关系数为 0，所以，由二元正态分布的性质知，X,Y 独立，所以

$$\begin{aligned}E(XY^2)&=EXEY^2\\&=\mu[DY+(EY)^2]\\&=\mu(\sigma^2+\mu^2).\end{aligned}$$

【评注】此题考查二维正态随机变量相关性和独立性的关系：对于二维正态随机变量 X,Y，其相关性与独立性等价. 注意公式 $EY^2=DY+(EY)^2$ 的应用. 此题为基本题型.

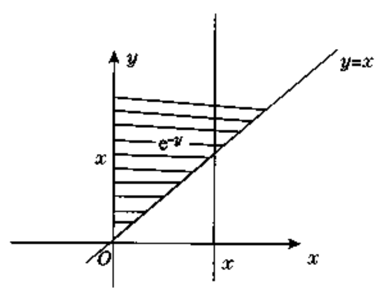
三、解答题

(15) **【分析】**计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限，首先利用等价无穷小代换，然后利用洛比达法则求极限即可.

【解】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【评注】本题考查 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的计算方法，是基本常考题型，需熟练重点掌握. 一般对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 和 $\frac{0}{0}$ 两种未定式极限的求解，能进行无穷小代换的首先要进行无穷小代换，然后再考虑是否可以用洛比达法则计算，也可以考虑利用泰勒公式求解. 常用的各类等价无穷小代换需熟练掌握.

(16) **【分析】**对多元复合函数求偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 对 x 和 y 求偏导时，$u=x+y$，$v=f(x,y)$ 都是 x 和 y 的函数，注意使用链式法则，一定要理清中间变量和自变量之间的关系. 此题中还要注意条件中所包含的信息：$f(1,1)=2$ 是函数 $f(u,v)$ 的极值，因为 $f(u,v)$ 有连续的二阶导数，从而 $f'_u(1,1)=f'_v(1,1)=0$.



【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1(x+y,f(x,y))+f'_2(x+y,f(x,y))\cdot f'_1(x,y)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}(x+y,f(x,y))+f''_{12}(x+y,f(x,y))\cdot f'_2(x,y)+f''_{12}(x,y)\cdot f'_2(x+y,f(x,y))+f'_1(x,y)[f''_{21}(x+y,f(x,y))+f''_{22}(x+y,f(x,y))\cdot f'_2(x,y)]$.

由题意知 $f'_1(1,1)=0,f'_2(1,1)=0$，

从而 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{11}(2,2)+f'_2(2,2)f''_{12}(1,1)$.

【评注】本题考查多元复合函数二阶混合偏导的求导方法，注意分析二元函数 $z=f(u,v)$ 中中间变量 u,v 是否仍为自变量 x 和 y 的函数，若是，需要再乘以 u,v 对 x,y 的偏导数．本题中还涉及可导二元函数在某点取极值的知识点．本题属于基本题型．

(17)【分析】利用分部积分法求解被积函数中含有反三角函数的不定积分．

【解】
$$
\begin{aligned}
\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx&=2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)d\sqrt{x}\\
&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}\\
&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}-4\sqrt{x}\\
&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.
\end{aligned}
$$

【评注】本题考查不定积分的求解，属基本题型．被积函数中含有反三角函数时，一般使用分部积分法，把反三角函数留在积分号内，或者考虑使用凑微分法．求函数的不定积分，方法灵活多变，需记住常用的几种积分方法，多加练习．

(18)【分析】首先判断函数的单调区间，然后在每个单调区间内利用零点定理证明即可．

【证】设 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，

$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}$.

令 $f'(x)==0$，解得驻点 $x_1=-\sqrt{3},x_2=\sqrt{3}$.

由单调性判别法知

$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3}]$ 上单调减少，在 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 上单调增加，在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上单调减少．

因为 $f(-\sqrt{3})=0$，且由上述单调性可知 $f(-\sqrt{3})$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3}]$ 上的最小值，所以 $x=-\sqrt{3}$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3}]$ 上唯一的零点．

又因为 $f(\sqrt{3})=2\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，

所以由连续函数的介值定理知 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内存在零点，且由 $f(x)$ 的单调性知零点唯一．

综上可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个零点，即原方程恰有两个实根．

【评注】本题要证明函数有且只有两个实根，考查了函数单调区间的判断和零点定理（介值定理的推广）的应用．证明函数在某个区间上根的存在性，首先想到的就是零点定理．如果函数在某个区间上严格单调，那么若有根的话，最多只有一个根．本题所涉及知识点是基本知识点，属基础题型．

(19)【分析】注意题目中所给的信息，积分区域 D_t 为一个三角形，而 $\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中被积函数对积分变量 x,y 来说相当于常数，可直接提取到积分号外．通过题目条件中所给的等式建立微分方程，并利用 $f(0)=1$ 作为方程的初始条件，求解出 $f(t)$ 的表达式即可．

【解】$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^t (f(t)-f(x))\mathrm{d}x$$

$$= tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x,$$

又 $\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{t^2}{2}f(t)$,

由题设有 $tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{t^2}{2}f(t)$.

两数求导整理得 $(2-t)f'(t) = 2f(t)$，解得 $f(t) = \dfrac{C}{(2-t)^2}$.

代入 $f(0)=1$，得 $C=4$.

故 $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

【评注】本题考查了定积分的计算，可分离变量的微分方程满足初始条件的特解的求解等多个知识点．所涉及的知识点都是基本知识点，需灵活掌握方能根据题设条件所包含的信息列出微分方程，进而求出函数的表达式．

(20)【分析】(Ⅰ)由题目条件知道，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，而它们都是三维向量，由任意 $n+1$ 和 $n+1$ 个以上的 n 维向量组必线性相关知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 必线性相关，对 $i=1,2,3$.（Ⅱ）利用矩阵初等变换的基础知识求解．

【解】(Ⅰ)4个3维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关($i=1,2,3$)，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示($i=1,2,3$)，与题设矛盾．于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关．

从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix} = a-5=0.$$

于是 $a=5$. 此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示．

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

从而

$\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【评注】本题(Ⅰ)考查已知向量组线性相关性反求其中参数，属常考知识点．本题(Ⅱ)考查将某一向量组用另一向量组线性表示的知识，属于基本题型，需熟练重点掌握．

(21)【分析】(Ⅰ)利用所给信息求矩阵的特征值和特征向量．注意，由于三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2，所以 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为0.（Ⅱ）在(Ⅰ)中已经求出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，直接利用此计算即可．

【解】（Ⅰ）由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，故 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值．由题设可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以，-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且属于 -1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$ 为任意非零常数；

1 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_2$ 为任意非零常数．

设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 0 的特征向量，由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad(1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即 $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$

于是属于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_3$ 为任意非零常数．

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

【评注】本题考查求解矩阵的特征值和特征向量的知识，实对称矩阵必可对角化，对角化的矩阵的对角线元素即为矩阵的特征值，而变换所用矩阵则由特征值对应的特征向量组成．本题所涉及知识点都是常考知识点，本题属于基本题型．

（22）【分析】（Ⅰ）利用随机变量 X 和 Y 的概率分布给出随机变量 (X,Y) 的联合概率分布．注意到 $P\{X^2=Y^2\}=1$，从而 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$．然后利用

$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}$

求出 $P\{X=0,Y=0\}$，依此类推，求出 $P\{X=1,Y=-1\}$，$P\{X=1,Y=1\}$ 的概率即可．

（Ⅱ）列出 $Z=XY$ 的所有可能取值，然后由（Ⅰ）的结果直接计算即可．（Ⅲ）由（Ⅰ）和（Ⅱ）中求出的 X 和 Y 的联合分布以及 Z 的分布直接利用公式计算相关系数即可．

【解】（Ⅰ）由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ 得 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$，所以
$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$.
故 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

（Ⅱ）$Z=XY$ 的可能取值为 $-1,0,1$. 由 (X,Y) 的概率分布可得 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（Ⅲ）由 X,Y 及 Z 的概率分布得

$EX=\frac{2}{3}, DX=\frac{2}{9}$,

$EY=0, DY=\frac{2}{3}$,

$EZ=E(XY)=0$,

故有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0, \rho_{XY}=0$.

【评注】本题（Ⅰ）已知两个随机变量的分布，求其联合分布，属于基本题型.（Ⅱ）考查二维随机变量函数的概率分布的计算方法，也是基本题型.（Ⅲ）考查两随机变量的相关系数的计算公式 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{EXEY-EXY}{\sqrt{DXDY}}$. 类似题目可参见《考研数学复习指南》（经济类，2012 版）P_{178} 题型六中的多个例题，多加练习，熟练掌握.

(23)【分析】（Ⅰ）首先依据题设中所给信息写出 (X,Y) 的联合分布密度，然后可利用求边际密度的公式直接求解.（Ⅱ）首先求出 Y 的边际密度，然后利用求条件概率密度的公式直接求解.

【解】（Ⅰ）(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

X 的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(1) 当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$f_X(x)=0$；

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x \mathrm{d}y=x$；

(3) 当 $1<x\leqslant 2$ 时，$f_X(x)=\int_0^{2-x}\mathrm{d}y=2-x$.

综上所述

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ)Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_y^{2-y}\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $Y=y(0\leqslant y<1)$ 时，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【评注】(Ⅰ)考查二维均匀分布和求边际分布的有关知识，属于基本知识点.(Ⅱ)考查条件概率密度函数的计算，也是对基本公式基本知识点的考查，属于基本题型. 这里要注意的是，本题使用公式 $f_{X|Y}=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 求给定 Y 的条件下 X 的条件概率密度，Y 的边际密度函数为分段函数，在除以 $f_Y(y)$ 时需特别注意.