首届全国大学生数学竞赛赛区赛试卷参考答案

（非数学类，2009）

一、　填空题

（1）计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$______________，其中区域$D$由直线$x+y=1$与两坐标轴所围三角形区域.

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$____________________.

（3）曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是_________________________.

（4）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$_____________________.

答案：$\frac{16}{15}$，$3x^2-\frac{10}{3}$，　$2x+2y-z-5=0$，$-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

二、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$，其中 n是给定的正整数.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\frac{e}{x}\ln(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，由 $L'Hospital$ 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=(\frac{n+1}{2})e$$

于是　原式$=e^{(\frac{n+1}{2})e}$.

三、设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ ，A 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0$， $g(0)=0$.

令 $u=xt$，得 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}\quad (x\neq 0)$，

从而 $$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad (x\neq 0)$$

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0),$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四、已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi\ ,0\le y\le \pi\}$ ，L 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ ；

（2）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge \dfrac{5}{2}\pi^2$.

证法一：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1) 左边 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ，

右边 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ，

所以 $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$ ，

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge \frac{5}{2}\pi^2\ .$$

证法二：（1）根据 $Green$ 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\delta$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})d\delta$$

因为 关于 $y = x$ 对称，所以 $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\delta = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})d\delta$ ，故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx \ .$$

(2) 由 $e^t + e^{-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\delta = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x})d\delta \geq \frac{5}{2}\pi^2 .$$

五、已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$ ， $y_2 = xe^x + e^{-x}$ ， $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解：根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法

解法一： 故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$

将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x$ ，

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

解法二：故 $y = xe^x + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，

由 $y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$ ， $y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ ，消去 c_1，c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

六、设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时，$y \geq 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a，b，c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解： 因抛物线过原点，故 $c = 1$

由题设有 $\int_0^1 (ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$.即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$ ，

而 $V=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2 dx=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2]$

$=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$.

令 $\frac{dv}{da}=\pi[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)]=0$，

得 $a=-\frac{5}{4}$ ，代入 b 的表达式 得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\geq 0$，

又因 $\frac{d^2v}{da^2}|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}]=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4},\ b=\frac{3}{2},\ c=1$ 时，体积最小.

七、已知 $u_n(x)$ 满足

$u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ （n 为正整数），

且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解：先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n{}'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c) ,$$

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，有

$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ ，

故 $s(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$

当 $x=-1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$.

于是，当 $-1\le x<1$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{x}\ln(1-x)$.

八、求 $x\to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解：$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt\le\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\le 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt$，

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$